

Motifs de frise

Matthew Pressland

Université de Caen Normandie

18^e journée de la Fédération Normandie-Mathématiques

17/06/2026

Téléchargez les diapositifs :

bit.ly/mdp-jdlf



Motifs de frise

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	1	4	1	3	2	1	4	2	1	...	
	1	3	3	2	5	1	3	7	1	3	
...	2	2	5	3	2	2	5	3	2	...	
	5	1	3	7	1	3	3	2	5	1	
...	2	1	4	2	1	4	1	3	2	...	
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

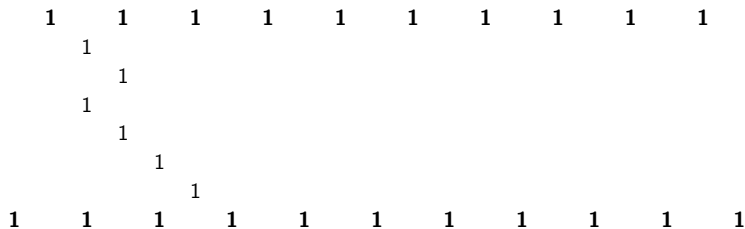
Le jeu de Conway et Coxeter (1973) : entre les deux lignes de **1s**, remplir la grille avec des entiers strictement positifs tels que

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ a & & d \\ & c & \end{array} \implies ad - bc = 1 \quad (\text{r\^e}gle \text{ du diamant})$$

Le nombre ℓ de lignes (sans le bord) est la *largeur* de la frise.

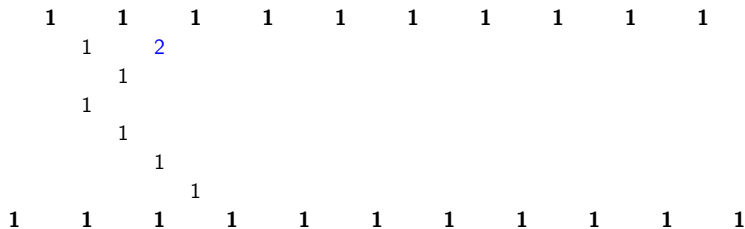
Une stratégie

En commençant avec un « éclair » de 1s, on peut tricoter avec la règle du diamant (en forme $d = \frac{1+bc}{a}$).



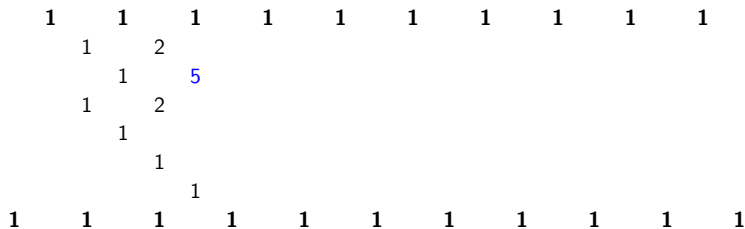
Une stratégie

En commençant avec un « éclair » de 1s, on peut tricoter avec la règle du diamant (en forme $d = \frac{1+bc}{a}$).



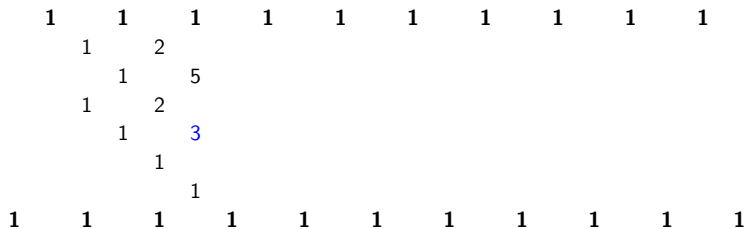
Une stratégie

En commençant avec un « éclair » de 1s, on peut tricoter avec la règle du diamant (en forme $d = \frac{1+bc}{a}$).



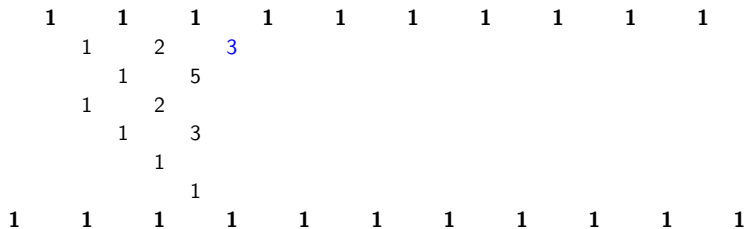
Une stratégie

En commençant avec un « éclair » de 1s, on peut tricoter avec la règle du diamant (en forme $d = \frac{1+bc}{a}$).



Une stratégie

En commençant avec un « éclair » de 1s, on peut tricoter avec la règle du diamant (en forme $d = \frac{1+bc}{a}$).



Une stratégie

En commençant avec un « éclair » de 1s, on peut tricoter avec la règle du diamant (en forme $d = \frac{1+bc}{a}$).

...	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
	3	1	2	3	2	2	2	1	5	3	1	
...	2	1	5	5	3	3	1	4	14	2	...	
	9	1	2	8	7	4	1	3	11	9	1	
...	4	1	3	11	9	1	2	8	7	4	...	
	3	3	1	4	14	2	1	5	5	3	3	
...	2	2	1	5	3	1	2	3	2	2	...	
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

Surprise 1 : on n'obtient que des entiers (malgré la division) !

Surprise 2 : le résultat est périodique !

Ces phénomènes sont généraux, et la période est $\ell + 3$.

Phénomène de Laurent

La frise générale de largeur 2 :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & \\ \dots & & & & u_1 & & \frac{1+u_2}{u_1} & & \frac{1+u_1}{u_2} & & u_2 & & \dots \\ & & \frac{1+u_1}{u_2} & & & & u_2 & & \frac{1+u_1+u_2}{u_1 u_2} & & u_1 & & \frac{1+u_2}{u_1} \\ \dots & & & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & \mathbf{1} & & \dots \end{array}$$

Phénomène de Laurent

La frise générale de largeur 2 :

	1		1		1		1		1	
...		1		2		2		1		...
	2		1		3		1		2	
...		1		1		1		1		...

Tous les coefficients sont polynômes de Laurent, mais cette propriété n'est pas du tout évidente :

$$\frac{1 + \frac{1 + u_1 + u_2}{u_1 u_2}}{\frac{1 + u_2}{u_1}} = \frac{u_1(1 + u_1 + u_2 + u_1 u_2)}{u_1 u_2(1 + u_2)} = \frac{(1 + u_1)(1 + u_2)}{u_2(1 + u_2)} = \frac{1 + u_1}{u_2}$$

À cause de ce phénomène de Laurent, on obtient des entiers à $u_i = 1$.

Algèbres amassées

Fomin et Zelevinsky (2002) définissent une algèbre amassée \mathcal{A} en construisant récursivement un ensemble de générateurs (variables amassées) dans $\mathbb{Q}(u_1, \dots, u_n)$.

Théorème (Fomin–Zelevinsky 2002)

Chaque variable amassée de \mathcal{A} est un polynôme de Laurent dans les variables u_1, \dots, u_n .

La démonstration originale de Fomin et Zelevinsky est purement combinatoire : il y a aussi une version géométrique par Gross, Hacking, Keel et Kontsevich.

Algèbres amassées

Fomin et Zelevinsky (2002) définissent une algèbre amassée \mathcal{A} en construisant récursivement un ensemble de générateurs (variables amassées) dans $\mathbb{Q}(u_1, \dots, u_n)$.

Théorème (Fomin–Zelevinsky 2002)

Chaque variable amassée de \mathcal{A} est un polynôme de Laurent dans les variables u_1, \dots, u_n .

La démonstration originale de Fomin et Zelevinsky est purement combinatoire : il y a aussi une version géométrique par Gross, Hacking, Keel et Kontsevich.

Observation (Caldero–Chapoton 2006)

Dans la frise générale de largeur n , les coefficients sont les variables amassées d'une algèbre amassée (de type A_n).

\implies coefficients entiers positifs, en posant $u_i = 1$.

Suites de quiddité

Deuxième stratégie : choisir une suite périodique pour la première ligne (la *suite de quiddité*) et tricoter verticalement en utilisant $c = \frac{ad-1}{b}$.

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	1	4	1	3	2	1	4	2	1	...	

Suites de quiddité

Deuxième stratégie : choisir une suite périodique pour la première ligne (la *suite de quiddité*) et tricoter verticalement en utilisant $c = \frac{ad-1}{b}$.

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	1	4	1	3	2	1	4	2	1	...	
	1	3	3	2	5	1	3	7	1	3	

Suites de quiddité

Deuxième stratégie : choisir une suite périodique pour la première ligne (la *suite de quiddité*) et tricoter verticalement en utilisant $c = \frac{ad-1}{b}$.

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	1	4	1	3	2	1	4	2	1	...	
	1	3	3	2	5	1	3	7	1	3	
...	2	2	5	3	2	2	5	3	2	...	

Suites de quiddité

Deuxième stratégie : choisir une suite périodique pour la première ligne (la *suite de quiddité*) et tricoter verticalement en utilisant $c = \frac{ad-1}{b}$.

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	1	4	1	3	2	1	4	2	1	...	
	1	3	3	2	5	1	3	7	1	3	
...	2	2	5	3	2	2	5	3	2	...	
	5	1	3	7	1	3	3	2	5	1	

Suites de quiddité

Deuxième stratégie : choisir une suite périodique pour la première ligne (la *suite de quiddité*) et tricoter verticalement en utilisant $c = \frac{ad-1}{b}$.

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	1	4	1	3	2	1	4	2	1	...	
	1	3	3	2	5	1	3	7	1	3	
...	2	2	5	3	2	2	5	3	2	...	
	5	1	3	7	1	3	3	2	5	1	
...	2	1	4	2	1	4	1	3	2	...	

Suites de quiddité

Deuxième stratégie : choisir une suite périodique pour la première ligne (la *suite de quiddité*) et tricoter verticalement en utilisant $c = \frac{ad-1}{b}$.

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	1	4	1	3	2	1	4	2	1	...	
	1	3	3	2	5	1	3	7	1	3	
...	2	2	5	3	2	2	5	3	2	...	
	5	1	3	7	1	3	3	2	5	1	
...	2	1	4	2	1	4	1	3	2	...	
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

Problème 1 : il faut diviser, et si $a = d = 1$, on obtient 0.

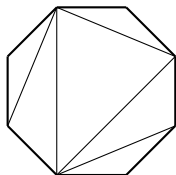
Problème 2 : est-ce qu'on va arriver à une ligne de **1s**, après la largeur prévue par la périodicité de la première ligne ?

Pour éviter ces problèmes, il faut choisir la suite de quiddité avec soin.

Polygones triangulés

Observation remarquable de Conway et Coxeter : les suites de quiddité valides sont exactement ceux qui viennent de polygones triangulés.

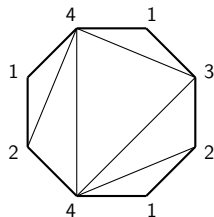
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	1	4	1	3	2	1	4	2	1	...	
	1	3	3	2	5	1	3	7	1	3	
...	2	2	5	3	2	2	5	3	2	...	
	5	1	3	7	1	3	3	2	5	1	
...	2	1	4	2	1	4	1	3	2	...	
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	



Polygones triangulés

Observation remarquable de Conway et Coxeter : les suites de quiddité valides sont exactement ceux qui viennent de polygones triangulés.

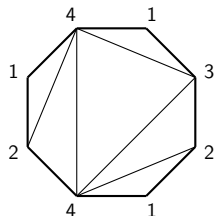
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	1	4	1	3	2	1	4	2	1	...	
	1	3	3	2	5	1	3	7	1	3	
...	2	2	5	3	2	2	5	3	2	...	
	5	1	3	7	1	3	3	2	5	1	
...	2	1	4	2	1	4	1	3	2	...	
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	



Polygones triangulés

Observation remarquable de Conway et Coxeter : les suites de quiddité valides sont exactement ceux qui viennent de polygones triangulés.

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	1	4	1	3	2	1	4	2	1	...	
	1	3	3	2	5	1	3	7	1	3	
...	2	2	5	3	2	2	5	3	2	...	
	5	1	3	7	1	3	3	2	5	1	
...	2	1	4	2	1	4	1	3	2	...	
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

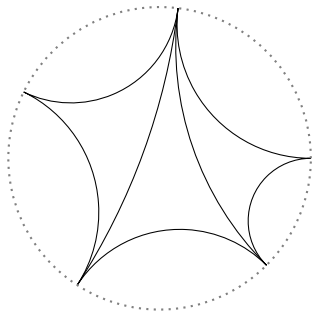


Pour obtenir une suite de quiddité valide pour une frise de largeur ℓ , on choisit une triangulation d'un polygone à $\ell + 3$ cotés.

Les coefficients de la suite sont les nombres de triangles incidents à chaque sommet du polygone.

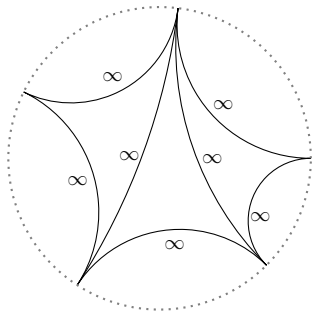
Polygones hyperboliques

En donnant un polygone idéal dans le disque de Poincaré, on peut mesurer les longueurs de ses côtés et ses diagonales.



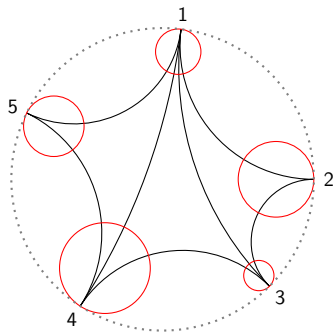
Polygones hyperboliques

En donnant un polygone idéal dans le disque de Poincaré, on peut mesurer les longueurs de ses côtés et ses diagonales.



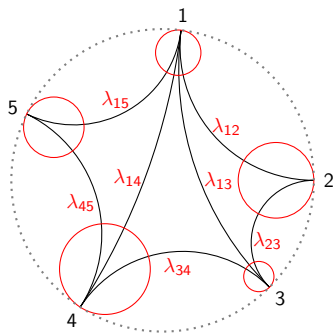
Polygones hyperboliques

En donnant un polygone idéal dans le disque de Poincaré, et une collection d'**horocycles** aux crêtes, on peut mesurer les **λ -longueurs** de ses côtés et ses diagonales.



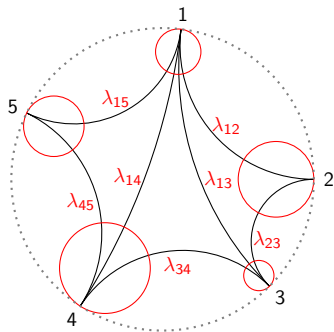
Polygones hyperboliques

En donnant un polygone idéal dans le disque de Poincaré, et une collection d'**horocycles** aux crêtes, on peut mesurer les **λ -longueurs** de ses côtés et ses diagonales.



Polygones hyperboliques

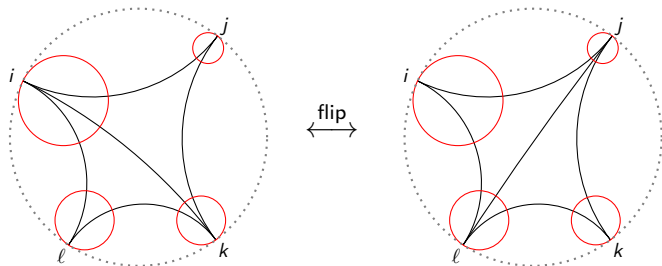
En donnant un polygone idéal dans le disque de Poincaré, et une collection d'**horocycles** aux crêtes, on peut mesurer les **λ -longueurs** de ses côtés et ses diagonales.



L'espace décoré de Teichmüller $\tilde{\mathcal{T}}_n$ consiste des paires d'un n -gone idéal dans le disque de Poincaré et un choix d'horocycles, à équivalence près.

Le « flip »

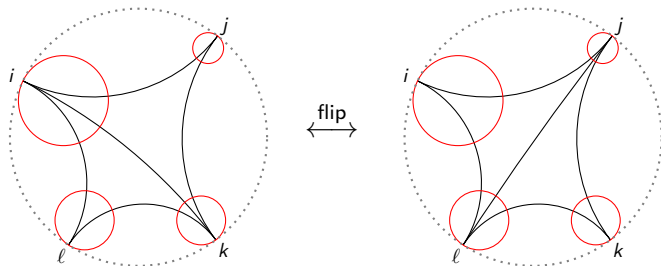
Mouvement de Whitehead / relation de Ptolémée :



$$\lambda_{ik}\lambda_{jl} = \lambda_{ij}\lambda_{kl} + \lambda_{il}\lambda_{jk}$$

Le « flip »

Mouvement de Whitehead / relation de Ptolémée :

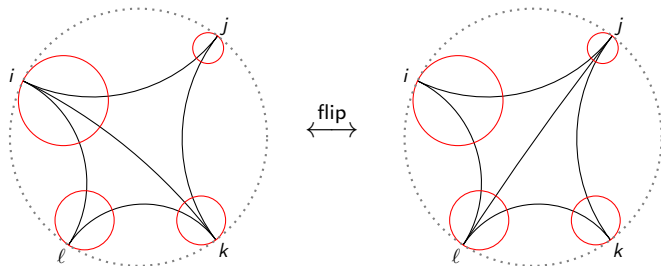


$$\lambda_{ik}\lambda_{jl} = \lambda_{ij}\lambda_{kl} + \lambda_{il}\lambda_{jk}$$

De cette manière, les λ -longueurs des arcs dans une seule triangulation déterminent toutes les autres.

Le « flip »

Mouvement de Whitehead / relation de Ptolémée :



$$\lambda_{ik}\lambda_{jl} = \lambda_{ij}\lambda_{kl} + \lambda_{il}\lambda_{jk}$$

De cette manière, les λ -longueurs des arcs dans une seule triangulation déterminent toutes les autres.

Théorème (Penner, 1987)

Chaque triangulation du n -gone détermine un isomorphisme $\lambda: \tilde{\mathcal{T}}_n \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}_+^*)^{2n-3}$.

Retour vers les frises

Les λ -longueurs d'un n -gone idéale forment un motif de frise réel (à coefficients).

	λ_{12}	λ_{23}	λ_{34}	λ_{45}	λ_{56}	λ_{67}	λ_{78}	λ_{18}	λ_{12}	λ_{23}	
...	λ_{13}	λ_{24}	λ_{35}	λ_{46}	λ_{57}	λ_{68}	λ_{17}	λ_{28}	λ_{13}	...	
	λ_{38}	λ_{14}	λ_{25}	λ_{36}	λ_{47}	λ_{58}	λ_{16}	λ_{27}	λ_{38}	λ_{14}	
...	λ_{48}	λ_{15}	λ_{26}	λ_{37}	λ_{48}	λ_{15}	λ_{26}	λ_{37}	λ_{48}	...	
	λ_{47}	λ_{58}	λ_{16}	λ_{27}	λ_{38}	λ_{14}	λ_{25}	λ_{36}	λ_{47}	λ_{58}	
...	λ_{57}	λ_{68}	λ_{17}	λ_{28}	λ_{13}	λ_{24}	λ_{35}	λ_{46}	λ_{57}	...	
	λ_{56}	λ_{67}	λ_{78}	λ_{18}	λ_{12}	λ_{23}	λ_{34}	λ_{45}	λ_{56}	λ_{67}	

Retour vers les frises

Les λ -longueurs d'un n -gone idéale forment un motif de frise réel (à coefficients).

	λ_{12}	λ_{23}	λ_{34}	λ_{45}	λ_{56}	λ_{67}	λ_{78}	λ_{18}	λ_{12}	λ_{23}	
...	λ_{13}	λ_{24}	λ_{35}	λ_{46}	λ_{57}	λ_{68}	λ_{17}	λ_{28}	λ_{13}	...	
	λ_{38}	λ_{14}	λ_{25}	λ_{36}	λ_{47}	λ_{58}	λ_{16}	λ_{27}	λ_{38}	λ_{14}	
...	λ_{48}	λ_{15}	λ_{26}	λ_{37}	λ_{48}	λ_{15}	λ_{26}	λ_{37}	λ_{48}	...	
	λ_{47}	λ_{58}	λ_{16}	λ_{27}	λ_{38}	λ_{14}	λ_{25}	λ_{36}	λ_{47}	λ_{58}	
...	λ_{57}	λ_{68}	λ_{17}	λ_{28}	λ_{13}	λ_{24}	λ_{35}	λ_{46}	λ_{57}	...	
	λ_{56}	λ_{67}	λ_{78}	λ_{18}	λ_{12}	λ_{23}	λ_{34}	λ_{45}	λ_{56}	λ_{67}	

La règle du diamant correspond à une relation de Ptolémée :

$$\lambda_{i,j}\lambda_{i+1,j+1} = \lambda_{i,j+1}\lambda_{i+1,j} + \lambda_{i,i+1}\lambda_{j,j+1}$$

Retour vers les frises

Les λ -longueurs d'un n -gone idéale à côtés de longueur 1 forment un motif de frise réel .

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	λ_{13}	λ_{24}	λ_{35}	λ_{46}	λ_{57}	λ_{68}	λ_{17}	λ_{28}	λ_{13}	...	
	λ_{38}	λ_{14}	λ_{25}	λ_{36}	λ_{47}	λ_{58}	λ_{16}	λ_{27}	λ_{38}	λ_{14}	
...	λ_{48}	λ_{15}	λ_{26}	λ_{37}	λ_{48}	λ_{15}	λ_{26}	λ_{37}	λ_{48}	...	
	λ_{47}	λ_{58}	λ_{16}	λ_{27}	λ_{38}	λ_{14}	λ_{25}	λ_{36}	λ_{47}	λ_{58}	
...	λ_{57}	λ_{68}	λ_{17}	λ_{28}	λ_{13}	λ_{24}	λ_{35}	λ_{46}	λ_{57}	...	
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

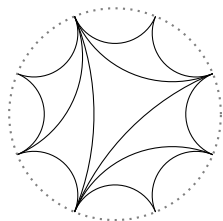
La règle du diamant correspond à une relation de Ptolémée :

$$\lambda_{i,j}\lambda_{i+1,j+1} = \lambda_{i,j+1}\lambda_{i+1,j} + 1$$

Théorie des amas

Résultat : un motif de frise de largeur n est un point entier positif de $\tilde{\mathcal{T}}_{n+3}$.

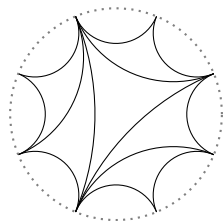
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	1	4	1	3	2	1	4	2	1	...	
	1	3	3	2	5	1	3	7	1	3	
...	2	2	5	3	2	2	5	3	2	...	
	5	1	3	7	1	3	3	2	5	1	
...	2	1	4	2	1	4	1	3	2	...	
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	



Théorie des amas

Résultat : un motif de frise de largeur n est un point entier positif de $\tilde{\mathcal{T}}_{n+3}$.

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	1	4	1	3	2	1	4	2	1	...	
	1	3	3	2	5	1	3	7	1	3	
...	2	2	5	3	2	2	5	3	2	...	
	5	1	3	7	1	3	3	2	5	1	
...	2	1	4	2	1	4	1	3	2	...	
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	



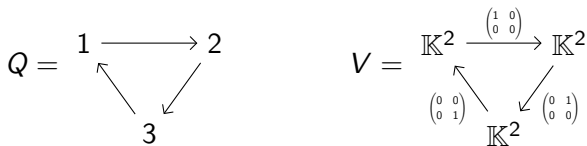
Interprétation en théorie des amas (Gekhtman–Shapiro–Vainshtein 2005) : $\tilde{\mathcal{T}}_{n+3}$ est la partie positive d'une variété amassée complexe de type A_n .

Il y a des résultats similaires pour autres « espaces positifs », par exemple la Grassmannienne totalement positive $\text{Gr}_{k,n}^{>0}$.

Représentations de carquois

Un *carquois* Q est un graphe dirigé (quand on l'utilise pour algèbre).

Une *représentation* V du carquois assigne un espace vectoriel à chaque sommet et une application linéaire à chaque flèche.



Représentations de carquois

Un *carquois* Q est un graphe dirigé (quand on l'utilise pour algèbre).

Une *représentation* V du carquois assigne un espace vectoriel à chaque sommet et une application linéaire à chaque flèche.

$$Q = \begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 2 \\ & \swarrow & \searrow \\ & 3 & \end{array}$$
$$V = \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} & \mathbb{K}^2 \\ & \swarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \searrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \mathbb{K}^2 & \end{array}$$

La représentation est *indécomposable* si elle n'est pas une somme directe non triviale.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} & \mathbb{K}^2 \\ & \swarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \searrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \mathbb{K}^2 & \end{array} \cong \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \xrightarrow{1} & \mathbb{K} \\ & \swarrow 0 & \searrow 0 \\ & 0 & \end{array} \oplus \begin{array}{ccc} 0 & \xrightarrow{0} & \mathbb{K} \\ & \swarrow 0 & \searrow 1 \\ & \mathbb{K} & \end{array} \oplus \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \xrightarrow{0} & 0 \\ & \swarrow 1 & \searrow 0 \\ & \mathbb{K} & \end{array}$$

Classification ?

Q : Pour un carquois donné, est-ce que c'est possible de classer les représentations indécomposables à isomorphisme près ?

Classification ?

Q : Pour un carquois donné, est-ce que c'est possible de classer les représentations indécomposables à isomorphisme près ?

A : Non ! (Typiquement.) Mais il y a des exceptions notables.

Classification ?

Q : Pour un carquois donné, est-ce que c'est possible de classer les représentations indécomposables à isomorphisme près ?

A : Non ! (Typiquement.) Mais il y a des exceptions notables.

Forme normale de Smith :

$$Q = 1 \longrightarrow 2 : \quad V_r = \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K}, \quad V_n = \mathbb{K} \longrightarrow 0, \quad V_c = 0 \longrightarrow \mathbb{K}$$

Classification ?

Q : Pour un carquois donné, est-ce que c'est possible de classer les représentations indécomposables à isomorphisme près ?

A : Non ! (Typiquement.) Mais il y a des exceptions notables.

Forme normale de Smith :

$$Q = 1 \longrightarrow 2 : \quad V_r = \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K}, \quad V_n = \mathbb{K} \longrightarrow 0, \quad V_c = 0 \longrightarrow \mathbb{K}$$

Forme normale de Jordan :

$$Q = \begin{array}{c} \curvearrowright \\ * \end{array} : \quad V_{n,\lambda} = \begin{array}{c} J_{n,\lambda} \\ \curvearrowright \\ * \end{array} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{K}$$

Type A_n : diagrammes de corde

Les représentations indécomposables des carquois de type A_n sont encodées en diagrammes de corde.

$$Q = 1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5$$

$$V = \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xleftarrow{1} \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} = \begin{matrix} 1 & & 3 & & \\ & 2 & & 4 & \\ & & & & 5 \end{matrix}$$

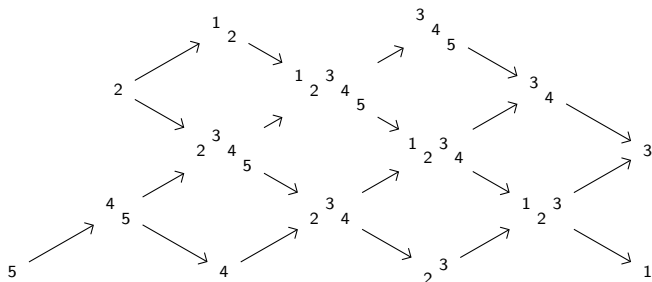
Type A_n : diagrammes de corde

Les représentations indécomposables des carquois de type A_n sont encodées en diagrammes de corde.

$$Q = 1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5$$

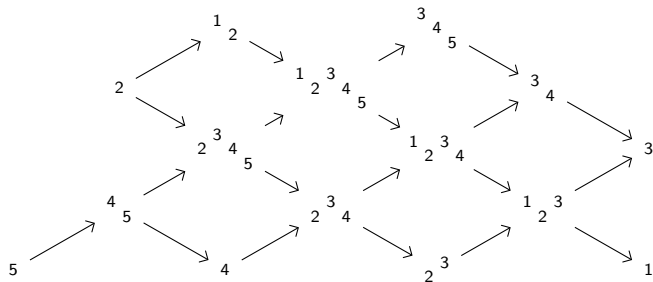
$$V = \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xleftarrow{1} \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} \xrightarrow{1} \mathbb{K} = \begin{matrix} 1 & & 3 & & \\ & 2 & & 4 & \\ & & & & 5 \end{matrix}$$

Comme ça, on peut décrire entièrement la catégorie $\text{rep } Q$.



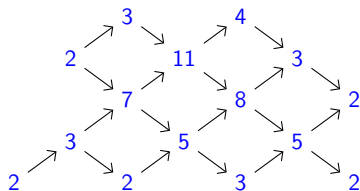
Compter les sous-représentations

Pour chaque indécomposable, on compte les sous-représentations
(= segments initiaux, en considérant le diagramme comme un poset).



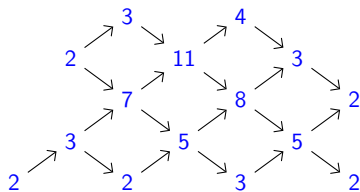
Compter les sous-représentations

Pour chaque indécomposable, on compte les sous-représentations
(= segments initiaux, en considérant le diagramme comme un poset).



Compter les sous-représentations

Pour chaque indécomposable, on compte les sous-représentations
(= segments initiaux, en considérant le diagramme comme un poset).



	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
...	2	1	3	4	1	2	2	3	2	...		
	5	1	2	11	3	1	3	5	5	1		
...	2	1	7	8	2	1	7	8	2	...		
	3	1	3	5	5	1	2	11	3	1		
...	1	2	2	3	2	1	3	4	1	...		
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

On a trouvé une frise !

La catégorie dérivée bornée

Pour $V \in \text{rep } Q$ et $i \in \mathbb{Z}$, soit $\Sigma^i V$ un symbole formel.

Les objets de la *catégorie dérivée bornée* $\mathcal{D}^b Q$ sont les sommes directes (formelles) de ces symboles.

Les morphismes de $\mathcal{D}^b Q$ sont les morphismes et les extensions de $\text{rep } Q$:

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}^b Q}(\Sigma^i V, \Sigma^j W) = \text{Ext}_Q^{j-i}(V, W) (= 0 \text{ si } j - i \notin \{0, 1\}).$$

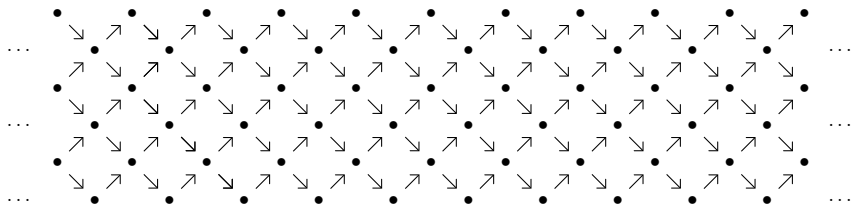
La catégorie dérivée bornée

Pour $V \in \text{rep } Q$ et $i \in \mathbb{Z}$, soit $\Sigma^i V$ un symbole formel.

Les objets de la *catégorie dérivée bornée* $\mathcal{D}^b Q$ sont les sommes directes (formelles) de ces symboles.

Les morphismes de $\mathcal{D}^b Q$ sont les morphismes et les extensions de $\text{rep } Q$:

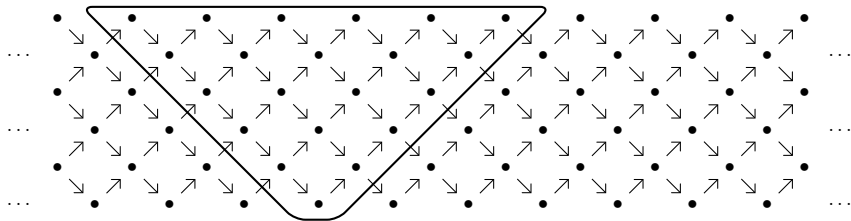
$$\text{Hom}_{\mathcal{D}^b Q}(\Sigma^i V, \Sigma^j W) = \text{Ext}_Q^{j-i}(V, W) \quad (= 0 \text{ si } j - i \notin \{0, 1\}).$$



Symétrie

La catégorie $\mathcal{D}^b Q$ possède une auto-équivalence $\Sigma : \Sigma^i V \mapsto \Sigma^{i+1} V$.

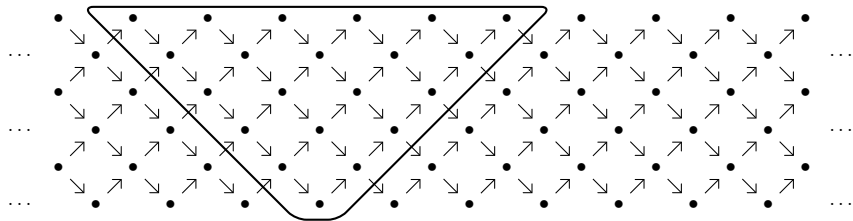
En type A, l'auto-équivalence Σ est une réflexion glissée, et $\text{rep } Q$ est un domaine fondamental.



Symétrie

La catégorie $\mathcal{D}^b Q$ possède une auto-équivalence $\Sigma : \Sigma^i V \mapsto \Sigma^{i+1} V$.

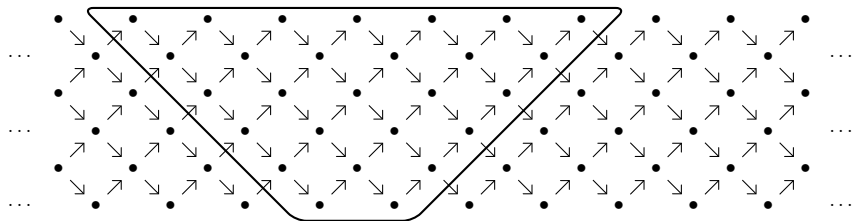
En type A, l'auto-équivalence Σ est une réflexion glissée, et $\text{rep } Q$ est un domaine fondamental.



Une deuxième auto-équivalence, la translation τ d'Auslander–Reiten, décale vers la gauche.

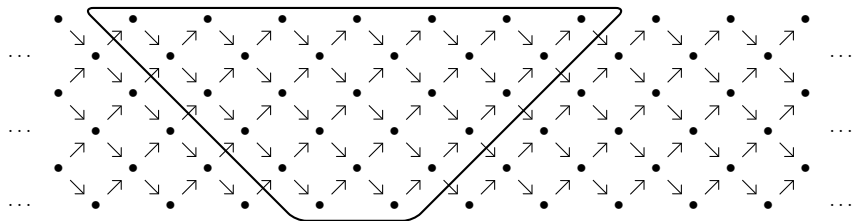
La catégorie des orbites

La symétrie $\Sigma^{-1} \circ \tau$ a le même domaine fondamental qu'une frise.



La catégorie des orbites

La symétrie $\Sigma^{-1} \circ \tau$ a le même domaine fondamental qu'une frise.



Definition (Buan–Marsh–Reineke–Reiten–Todorov, 2006)

Pour un carquois acyclique Q , la *catégorie amassée* \mathcal{C}_Q est la catégorie des orbites

$$\mathcal{C}_Q := \mathcal{D}^b Q / (\Sigma^{-1} \circ \tau).$$

Les objets sont même que dans $\mathcal{D}^b Q$, et les morphismes sont

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(X, Y) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b Q}(X, (\Sigma^{-1} \circ \tau)^n Y).$$

La catégorie amassée

Definition (Buan–Marsh–Reineke–Reiten–Todorov, 2006)

Pour un carquois acyclique Q , la *catégorie amassée* \mathcal{C}_Q est la catégorie des orbites

$$\mathcal{C}_Q := \mathcal{D}^b Q / (\Sigma^{-1} \circ \tau).$$

Les objets sont même que dans $\mathcal{D}^b Q$, et les morphismes sont

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_Q}(X, Y) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b Q}(X, (\Sigma^{-1} \circ \tau)^n Y).$$

Remarque

- ▶ Voir aussi Caldero–Chapoton–Schiffler pour type A.
- ▶ Voir aussi Amiot pour les carquois à cycles.
- ▶ Plusieurs autres généralisations : Plamondon, Igusa–Todorov, Geiß–Leclerc–Schröer, Buan–Iyama–Reiten–Scott, Jensen–King–Su, Demonet–Iyama, P, Wu, Keller–Wu,...

Le caractère amassé

Le caractère amassé CC: $\mathcal{C}_Q \rightarrow \mathbb{Q}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_n^{\pm 1}]$ de Caldero–Chapoton

$$\text{CC}(X) = u^{\text{ind } X} \sum_{e \leq \dim GX} \chi(\text{Gr}_e(GX)) u^{-B \cdot e}$$

convertit (certains) objets indécomposables de \mathcal{C}_Q en variables amassées.

L'objet GX est une représentation de Q .

Le caractère amassé

Le caractère amassé CC: $\mathcal{C}_Q \rightarrow \mathbb{Q}[u_1^{\pm 1}, \dots, u_n^{\pm 1}]$ de Caldero–Chapoton

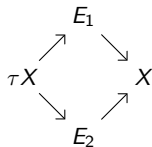
$$\text{CC}(X) = u^{\text{ind } X} \sum_{e \leq \dim GX} \chi(\text{Gr}_e(GX)) u^{-B \cdot e}$$

convertit (certains) objets indécomposables de \mathcal{C}_Q en variables amassées.

L'objet GX est une représentation de Q .

Fait essentiel : pour chaque maille $\tau X \rightarrow \bigoplus_{i=1}^k E_i \rightarrow X$, on a

$$\text{CC}(X) \text{CC}(\tau X) = \prod_{i=1}^k \text{CC}(E_i) + 1$$



\implies la règle du diamant !

Frise sur une catégorie amassée

À $u_i = 1$, on a

$$CC(X) = \sum_{e \leq \underline{\dim} GX} \chi(\text{Gr}_e(GX)),$$

le « nombre » de sous-représentations de la représentation GX de Q , où les familles infinies sont comptées soigneusement.

Frise sur une catégorie amassée

À $u_i = 1$, on a

$$CC(X) = \sum_{e \leq \underline{\dim} GX} \chi(\text{Gr}_e(GX)),$$

le « nombre » de sous-représentations de la représentation GX de Q , où les familles infinies sont comptées soigneusement.

Dans le type A_n et pour X indécomposable, il n'y a pas de famille infinie, et donc

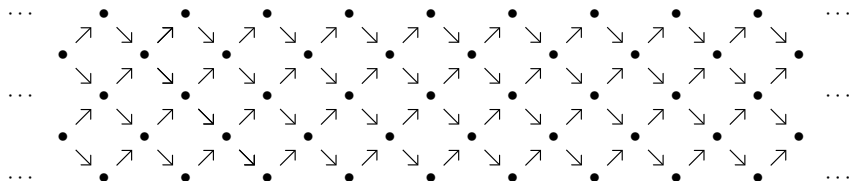
$$CC(X) = \#\{\text{sous-représentations de } GX\}.$$

Il y a plusieurs Q avec les \mathcal{C}_Q équivalentes, et donc plusieurs caractères amassés qui donnent des différentes frises.

Variation de Q

Il y a plusieurs Q avec les \mathcal{C}_Q équivalentes, et donc plusieurs caractères amassés qui donnent des différentes frises.

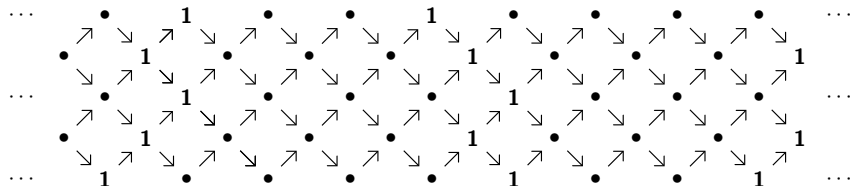
On obtient un tel Q pour chaque configuration possible de 1s dans la frise : ces configurations ont une description algébrique.



Variation de Q

Il y a plusieurs Q avec les \mathcal{C}_Q équivalentes, et donc plusieurs caractères amassés qui donnent des différentes frises.

On obtient un tel Q pour chaque configuration possible de 1s dans la frise : ces configurations ont une description algébrique.

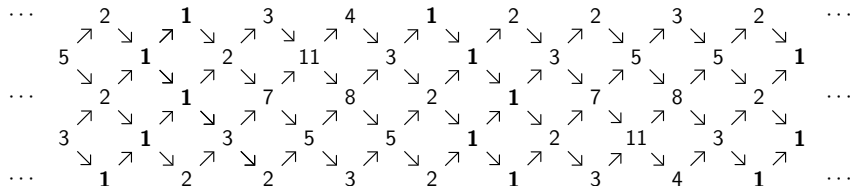


$$Q : 1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5$$

Variation de Q

Il y a plusieurs Q avec les C_Q équivalentes, et donc plusieurs caractères amassés qui donnent des différentes frises.

On obtient un tel Q pour chaque configuration possible de 1s dans la frise : ces configurations ont une description algébrique.

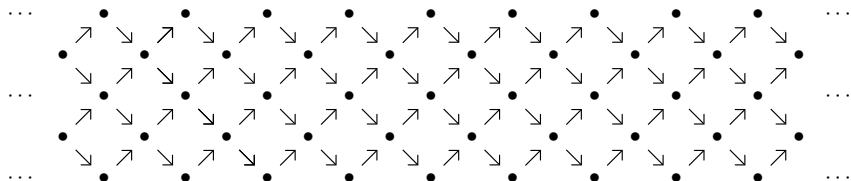


$$Q : 1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5$$

Variation de Q

Il y a plusieurs Q avec les \mathcal{C}_Q équivalentes, et donc plusieurs caractères amassés qui donnent des différentes frises.

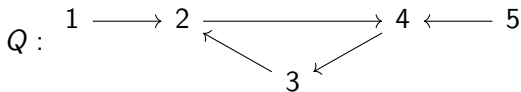
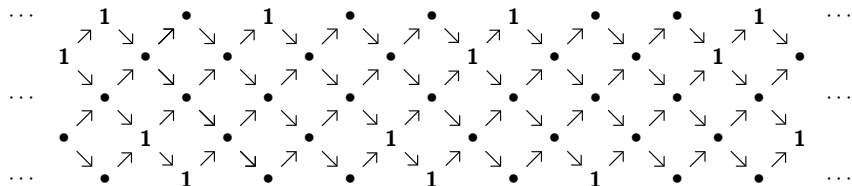
On obtient un tel Q pour chaque configuration possible de 1s dans la frise : ces configurations ont une description algébrique.



Variation de Q

Il y a plusieurs Q avec les \mathcal{C}_Q équivalentes, et donc plusieurs caractères amassés qui donnent des différentes frises.

On obtient un tel Q pour chaque configuration possible de 1s dans la frise : ces configurations ont une description algébrique.



Variation de Q

Il y a plusieurs Q avec les \mathcal{C}_Q équivalentes, et donc plusieurs caractères amassés qui donnent des différentes frises.

On obtient un tel Q pour chaque configuration possible de 1s dans la frise : ces configurations ont une description algébrique.

